رویکردی نوین به درک مفهوم مشتق

برای دانش‌آموزان متوسطه

عصمت چاهکی
دبیر ریاضی شهرستان اراک و کارشناسی ارشد آموزش ریاضی
مجید حق‌وردی
استادیار گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

مقدمه

مشـــتق یکی از مفاهیم بنیادی مهم در حسابان اســـت که به مفهوم تابع، حد و نرخ تغییر وابسته است. برای اکثر دانش‌آموزان درک تعاریف رسمی حد و مشتق دشوار است به‌طوری‌که توانایی به‌کارگیری دقیق تعریف‌ها را در موقعیت‌های مختلف ندارند و تنها قادر به حل مسائل در سطح شهودی هستند و از درک عمیق‌تر مفاهیم برخوردار نمی‌باشند. در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ درخصوص دشواری درک مفهوم حد مطالعات زیادی انجام شده است. هدف اصلی این مقاله معرفی رویکردی گسسته برای شکل‌گیری مفهوم مشتق است که توسط ویگاند (۲۰۱۴) معرفی شده است. در این روش بدون ارائه مفهوم حد، مفهوم نرخ تغییر با استفاده از نمونه‌های گســـته بیان و ذهن یادگیرنده به‌تدریج به‌ســـوی درک بهتر آهنگ تغییر و آهنگ لحظه‌ای ســـوق داده شده است. دنبالهٔ شـــیب‌های قاطع توابع Z_n گسسته برای تفسیر مشتق تابع f در نقطه‌ای خاص از نمودار f و در نتیجه محاسبه آهنگ لحظه‌ای ارائه می‌شود. بدین منظور روشی گام‌به‌گام از تفاضل دنباله‌ای برای توابع تعریف شده بر $\mathbb{Z}$ و دامنه گسسته $\mathbb{Q}$ مطرح می‌شود.

کلیدواژه‌ها: دنباله، تفاضل دنباله، حد، مشتق، آهنگ تغییر

مفهوم حد

چرچمن[1] (۱۹۷۲) به مقایسه سه روش مختلف، تعریـــف دنباله‌هـــا، تعریف اپســـیلون- دلتا و تعریف همســـایگی به‌منظور تعریف حد بـــرای دانش‌آموزان دوره متوســـطه پرداخـــت و بـــه این نتیجه رسـیـد کـــه روش به‌کارگیـــری دنباله‌ها برتـــری خاصی بر ســـایر روش‌ها دارد. ســـتین[2] (۲۰۰۹) بیان کرد که دانش‌آموزان با به‌کارگیری شیوه‌های استاندارد قادر به محاسبهٔ مقادیر حد می‌باشند اما نمی‌توانند مفهوم حد را در حل مسائل زندگی واقعی به‌کار ببرند. روردا[3]

و همکاران‌ش (۲۰۰۷) معتقدند به‌منظور درک مفهوم مشتق لازم است در کنار فهم فرآیندهای حد، ذهنیت دقیقی از آهنگ تغییر ایجاد شود و با عبور از آن، آهنگ لحظه‌ای درک شود سپس رابطهٔ مشتق با مسائل دنیای واقعی تشریح شود از این‌رو به محاسبهٔ تعیین سرعت متوسط خودروی در حال حرکت، شیب متوسط هنگام بالا رفتن از تپه، دمای هوای متوسط در یک روز پرداختند. کروچ[۴] و هینس[۵] (۲۰۰۴) اعتقاد دارند که دانش‌آموزان برای به‌کارگیری مشتق در علم فیزیک و اقتصاد دشواری‌های فراوانی دارند که ناشی از عدم درک دقیق این مفهوم است.

لانگ[۶] (۱۹۷۳) شیب نمودار $y=f(x)$ را در نقطه P بدون هیچ‌گونه معرفی مفاهیم حد یا دنباله مورد بحث قرار داد. شیب خط راست وصل‌کننده دو نقطه $(x,x+h)$ و $(f(x),f(x+h))$ را با نقطه فرضی (x,y) روی منحنی و عدد کوچک h (مثبت یا منفی) با $h\neq 0$ تعیین می‌کند. سپس این شیب به‌وسیله

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{(x+h)-x}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h \qquad (1)$$

مشخص می‌گردد و در حالی‌که h به صفر میل می‌کند، $2x+h$ به $2x$ نزدیک شده و در نتیجه شیب منحنی $y=x^2$ در نقطه فرضی (x,y)، $2x$ است و اگر از این شیب حد گرفته شود وقتی h به صفر میل‌کند، مشتق f در x نامیده می‌شود و به‌صورت

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (2)$$

نمایش داده می‌شود. این شیوهٔ محاسبهٔ مشتق برای تمامی تابع‌های چندجمله‌ای امکان‌پذیر است و استفاده از مفهوم دنباله حداقل تا زمانی که دانش‌آموز با توابع خاص مانند توابع مثلثاتی و نمایی مواجه نشده ضروری نمی‌باشد. در سال ۱۹۸۰، دنباله به‌عنوان یک ایده اصلی برای فهم ساده حد در نظر گرفته شد و نقطهٔ عطفی برای تغییر محتوا و ساختار کل برنامه درسی حسابان برای دسترسی آسان‌تر به مفهوم مشتق شد. ویگاند[۷] (۲۰۰۴) بیان کرد که دنباله‌ها توابعی با دامنه اعداد طبیعی تعریف می‌شوند که با نماد $a_n:N\to R$ نمایش داده می‌شوند، همچنین می‌توانند به‌طور بازگشتی تعریف شوند که برای نمایش فرایندهای رشد، مانند رشد خطی ($a_{n+1}=a_n+d$)، رشد نمایی ($a_{n+1}=A.a_n$) و رشد محدود $a_{n+1}=a_n+P(G-a_n)\ (n\in N)$ به‌کار برده شوند. ویگاند (۲۰۱۴) معتقد است هدف اصلی از آشنایی با دنباله‌های بازگشتی، مشاهده ارتباط نمایش لحظه‌ای بین جملات متوالی و نمایش کلی یک دنباله است همچنین وابستگی علائم موجود در دنباله مانند مقدار اولیه و پارامترها مورد توجه می‌باشد.

مشتق، آهنگ تغییر

به‌منظور درک مفهوم مشتق لازم است در کنار فهم فرایندهای حد، ذهنیت دقیقی از آهنگ تغییر داشته باشیم و در رابطه با فرایندهای حد، انتقال از آهنگ متوسط تغییر به آهنگ لحظه‌ای تغییر را درک کنیم. پیشنهادها و تحقیق‌های بسیاری در رابطه با درک مشتق وجود دارند که این مفهوم را با مسائل زندگی واقعی مرتبط می‌سازند، روردا و همکاران (۲۰۰۷).

امروزه به خوبی پذیرفته شده که درک مفهوم مشتق نیاز گسترده و وسیع بصری از نمونه‌ها و برداشت‌های مرتبط دارد و این مسئله به کاربرد آهنگ تغییر در مسائل زندگی واقعی می‌پردازد، به‌عنوان مثال، سرعت متوسط خودروی در حال حرکت، شیب متوسط هنگام بالا رفتن از تپه یا دمای هوای متوسط در یک روز. اگرچه مشخص گردیده که یادگیرنده‌ها در انتقال ذهنیت اولیه خود به مفاهیم ریاضی مشکل دارند. به‌منظور توسعه مفهوم ریاضی آهنگ لحظه‌ای تغییر جدا از تجارب زندگی واقعی نیاز است تا تغییر مفهوم مشتق دستخوش تغییراتی شود زیرا دانش‌آموزان در به‌کارگیری دانش مربوط به حساب در شرایط واقعی دچار مشکل هستند. کروچ و هینس (۲۰۰۴) این مشکلات را با کاربرد مفهوم مشتق در فیزیک و اقتصاد نشان می‌دهند. پیشنهادهای متعددی درباره استفاده از تکنولوژی‌های دیجیتالی در سطح عددی یا گرافیکی وجود دارند (کیدرون وزهاوی ۲۰۰۲، مارتینوف و کاراداگ ۲۰۱۲، کابالرو[۸] و همکاران ۲۰۱۱، هنینگ[۹] و هوفکامپ[۱۰] ۲۰۱۳).

همه این پیشنهادها، نقاط مشترکی دارند که به‌کار کردن با توابع پیوسته حقیقی مقدار و تصویرسازی با برنامهٔ جئوجبرا می‌پردازند و فرایندهایی را که از نظر حرکتی با دنبال کردن خطوط متقاطع تا خط مماس در نقطه‌ای از نمودار تابع و فرایند عددی همگرایی در چارچوب جدول در نظر می‌گیرند. عبور از دیدگاه پیوسته به فرایند گام‌به‌گام (گسسته‌سازی) به‌خاطر این است که با فرایند حد منطبق باشد که شامل انتخاب دنباله‌ای از نقاط روی نمودار یا دنباله‌ای از مقادیر عددی همگرا با مقدار انتخابی تابع تا نقطه‌ای از روی نمودار می‌باشد که باید توسط خود دانش‌آموزان صورت گیرد (ویگاند، ۲۰۱۴).

تصاویر کامپیوتری به‌عنوان منابع درک دانش‌آموزان از حد

یکی از منابع درک دانش‌آموزان درباره حد، تصاویری هستند که همگرایی دنباله را نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال، زمانی که دانش‌آموزان شروع به مطالعهٔ حد دنباله می‌کنند، معمولاً یادگرفته‌اند که حد دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ عدد واقعی وخاص L است که همان‌طور که n بزرگ‌تر می‌شود a_n، به L نزدیک‌تر می‌شود. تصویر ذهنی که دانش‌آموزان ازحد تابع به کمک تصاویر حرکتی نشان داده‌اند، در تجارب اولیه یادگیری آن‌ها قبل از نظریه رسمی که شامل تعریف دشوار حد می‌باشد، ارتقا یافته است (هیت[11] و لارا چاوز[12] ،۱۹۹۹). چنین تصویر حرکتی حد، تصویر ذهنی می‌شود که دانش‌آموزان به استفاده از آن حتی بعد از یادگیری تعریف دشوار حد ادامه می‌دهند (کیدرون و ذهاوی ،۲۰۰۲) به تأثیر تصاویرحرکتی روی یادگیری مفهوم حد اشاره داشتند و پویانمایی کامپیوتری را به‌عنوان ابزار قدرتمندی برای تصویر حرکتی حد پیشنهاد می‌دهند. مطالعه (پینتو[13] و تال ،۲۰۰۲) نیز حاکی از این است که تصاویر دیداری، نقش مثبتی در تدریس و یادگیری آنالیز حقیقی دارند. همچنین ناوارو[14] و کارراس[15] (۲۰۰۶) نشان دادند که روش آموزش دیداری نه‌تنها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا تصویر مناسبی از مفهوم حد در ذهن خود بسازند، بلکه به آن‌ها کمک می‌کند به‌سمت فهم تعریف دشوار حد حرکت کنند. از سوی دیگر الکوک[16] و سیمسون[17] (۲۰۰۵) تأیید می‌کنند که یادگیری با تصویرسازی در تفکر پیشرفته ریاضی اثرگذارتر است. بررسی نتایج مطالعات قبلی دربارهٔ درک دانش‌آموزان از حد نشان می‌دهد که جست‌وجوی رابطهٔ میان تصویر دانش‌آموزان از حد و فهم آن‌ها از تعریف حد ε-N را مطالعه می‌کنند، تقریباً به درکی از حد دست یافته‌اند. بنابراین، این دانش‌آموزان به تصویری از مفهوم حد به شیوه‌های خودشان دست می‌یابند. تناسب تصویر حد به‌دست آمده از طریق یادگیری قبلی می‌تواند به یادگیری تعریف حد ε-N کمک کند (رُو، ۲۰۰۸).

به‌منظور درک مفهوم مشتق لازم است در کنار فهم فرایندهای حد، ذهنیت دقیقی از آهنگ تغییر داشته باشیم و در رابطه با فرایندهای حد، انتقال از آهنگ متوسط تغییر به آهنگ لحظه‌ای تغییر را درک کنیم

دنباله‌ها، عناصراصلی برای درک مفهوم گسسته

دنباله‌ها نقش مهمی در ریاضی دارند به‌طوری‌که ابزاری برای توسعهٔ دیگر مفاهیم ریاضی مانند مفهوم حد نیز هستند. علاوه‌براین دنباله‌ها در ساخت موقعیت‌های زندگی واقعی مانند فرایندهای رشد به‌کار می‌روند. برخی از دنباله‌ها مانند دنباله فیبوناتچی[18]، دنباله اعداد اول، دنباله‌های اعداد چندضلعی، دارای ویژگی‌های شگفت‌آوری هستند. امروزه تکنولوژی‌های جدیدی توسعه یافته‌اند که باعث ایجاد دنباله‌ها، خلق علائم، نمایش‌های عددی و گرافیکی و تغییر میان این نمایش‌های مختلف می‌باشند. نمونه‌هایی از تحقیقات تجربی نشان می‌دهد که چگونه دانش‌آموزان در محیط‌های کامپیوتری به تعامل با دنباله‌ها می‌پردازند (ویگاند، ۲۰۱۴).

دنباله‌ها نمونه‌های اولیهٔ اهداف گسسته در ریاضی هستند. ازیک‌سو، دنباله‌ها به‌راحتی به‌عنوان توابعی تعریف می‌شوند که اعداد طبیعی دامنهٔ تعریف‌شان هستند، از سوی دیگر، مجموعهٔ گسترده‌ای از نمایش‌ها، مفاهیم مربوطه و مشاهدات مرتبط با مفهوم دنباله وجود دارد. دنباله‌ها می‌توانند با فرمول‌های بازگشتی، نمودارها، نمایش پیکانی یا جدول‌ها نشان داده شوند و در تمامی بخش‌های ریاضی از جمله دنباله‌های اعداد، نگاشت‌ها یا شکل‌های هندسی نمایان می‌شوند. همچنین الگوریتم‌ها دنباله‌هایی باپایان از مراحل مشخص شده هستند. مفهوم دنباله، پایهٔ شهودی در موقعیت‌های

زندگی روزانه دارد، مانند دنباله‌های کارت‌های بازی، تمبرها، روزها، سال‌ها و غیره. شیوهٔ تدریس دنباله‌ها در کلاس‌های ریاضی در آلمان، طی دو دهه گذشته تغییر یافته است. تاسال ۱۹۸۰، دنباله با دامنه وسیعی از دروس حسابان آموخته می‌شد تا پایه‌ای برای مفهوم حد در حسابان به‌وجود آورد.

تعریف‌های به‌کار رفته بسیار رسمی هستند مانند:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |A - a_n| < \varepsilon$$

اشکال‌های این تعریف‌های رسمی، شامل موارد زیر است:

ـ زمان زیادی طول می‌کشد تا دانش‌آموزان با نمادگذاری آشنا شوند.

ـ بسیاری از دانش‌آموزان بیشتر در سطح رسمی و گاهی بدون درک مفاهیم کار می‌کنند.

در چند سال گذشته، حسابان در مدرسه، با تابع‌های پیوسته براساس مفهوم شهودی حد آغاز شده است. دانش‌آموزان روی سطح شهودی مفهوم کار می‌کنند درحالی‌که ایده‌های در حال توسعه مربوط به مفهوم حد مانند نزدیک‌تر شدن یا تا جایی که می‌خواهند نزدیک شدن، هستند. مزیت فرضیهٔ جدید این است که مفاهیم مهم مانند مشتق و کاربردها با دنباله‌ها از همان ابتدا ترکیب شده‌اند و نتیجهٔ منفی آن، این است که بیشتر دانش‌آموزان بدون درک و فهم مفهوم دنباله کلاس‌های پایین‌تر را پشت‌سر می‌گذارند و داشتن ذهنیتی از ایده‌های اصلی محاسبه بدون شناخت دنباله، دشوار به‌نظر می‌رسد.

طی چند سال گذشته، در نتیجهٔ نقش رو به افزایش حضور کامپیوترها در ریاضی و آموزش ریاضی، ریاضیات گسسته و هم‌چنین دنباله‌ها، به اهمیت خاصی دست یافته‌اند. این مسئله توسط استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی امریکا[۱۹] (۱۹۸۹) نیز مورد تأکید واقع شده که ریاضیات گسسته‌ای به‌صورت استاندارد جداگانه برای کلاس‌های ۹ تا ۱۲ دارد. باید به دنباله‌ها و مجموعه‌ها توجه بیشتری کرد و تأکید بیشتری روی صفات آن‌ها باتوجه به روابط بازگشتی صورت گیرد. در مطالعه (ویگاند، ۲۰۱۴) سه دلیل برای نیاز به تجدید حیات مفهوم دنباله در ریاضیات مدرسه‌ای در آلمان اشاره شده است که این دلایل مرتبط با ایده‌های ریاضیات گسسته هستند. اول اینکه، بسیاری از مسائل زندگی واقعی، نمایش‌های ریاضی را با دنباله‌ها، مانند فرایندهای رشد آسان می‌کنند. دوم اینکه، بسیاری از مسائل ریاضی می‌توانند با دنباله‌های خاصی مانند اعداد مثلثی یا اعداد چندوجهی حل شوند. سوم اینکه، دنباله‌ها ابزاری برای توسعهٔ مفاهیم گسسته هستند همچنان که خارج‌قسمت تفاضلی می‌تواند اساسی برای درک دیفرانسیل باشد. تکنولوژی‌های جدید می‌توانند به‌صورت کاتالیزوری برای تجدید حیات دنباله‌ها در ریاضیات مدارس عمل کنند. امروزه، کامپیوترها ایجاد دنباله‌ها، نمایش‌های نمادین، عددی و گرافیکی، تغییر میان نمایش‌های مختلف را فقط با زدن یک دکمه امکان‌پذیر کرده‌اند. بنابراین، فکر می‌کنیم که کامپیوتر ابزار مناسبی برای ریاضیات گسسته، خصوصاً کارکردن با دنباله‌ها هستند (ویگاند،۲۰۰۴).

مفهوم گام‌به‌گام رویکرد گسسته در حسابان

در رویکرد گسسته مفهوم آهنگ متوسط تغییر براساس دنباله‌های مختلف با نگاهی بر توابع گسسته مطرح می‌شود. در این رویکرد آغاز کار بدون ارائه مفهوم حد است و مفهوم آهنگ تغییر با استفاده از مثال‌های گسسته شکل می‌گیرد سپس با تغییر تدریجی در دامنهٔ توابع، آهنگ تغییر به‌راحتی فهمیده می‌شود. ویگاند (۲۰۱۴) پنج سطح برای به‌کارگیری رویکرد گسسته به‌منظور درک مفهوم مشتق معرفی می‌کند.

سطح اول: دنباله‌های تفاضلی

هدف این سطح، معرفی مفهوم تفاضل دنباله‌ای $(n \in \mathbb{N})$ و $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ است چنانچه $\Delta n = 1$ فرض شود، Δa_n می‌تواند به‌عنوان آهنگ تغییر در نظر گرفته شود، که در مسائل واقعی زندگی به‌کار برده می‌شود مانند متوسط دمای هوا در هر سال که ممکن است به‌صورت جدول یا نمودار نشان داده شود.

سطح دوم: مفهوم توابع درجه دوم $\mathbb{Z}$

قبلاً دنباله با دامنهٔ $\mathbb{N}$ تعریف شد. اکنون مفهوم دنباله برای توابع تعریف شده روی $\mathbb{Z}$ بسط داده

می‌شـود. تابـع $f:\mathbb{Z}\to R$ را تابع $\mathbb{Z}$ می‌نامیـم. توابع $y=f(z)$ دنباله‌هایی هستند که روی اعداد صحیح $z\in\mathbb{Z}$ تعریف شده‌اند.

مثال ۱:

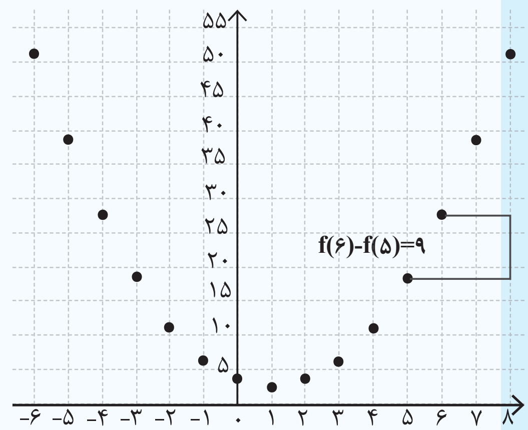
برای تابع

$f(z)=z^2-2z+3$

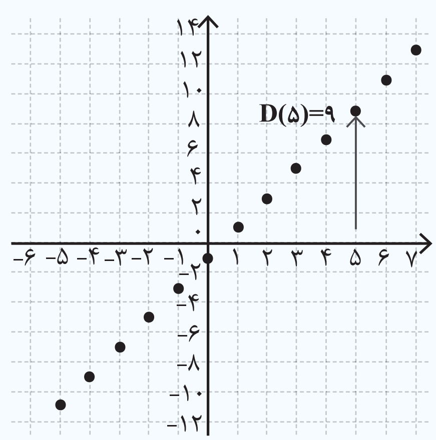
تابع تفاضلی به‌صورت:

$D_f(z)=f(z+1)-f(z)=2z+1-2$

می‌باشد.(شکل‌های ۱و۲)



شکل ۱. نمودار تابع $f(z)=z^2-2z+3$



شکل ۲. نمودار تابع تفاضلی $D_f:D_f(z)=f(z+1)-f(z)$

$D_f(z)$ آهنگ تغییر نمودار میان نقاط $(z,f(z))$ و $(z+1,f(z+1))$ اسـت که می‌توان به‌آسانی رابطه بین پارامترهای به‌کار رفته در $f(z)$ و D_z را فهمید.

مثال ۲:

برای

$f(z)=az^2+bz+c$

می‌توان به

$D_f(z)=2az+a+b$

رسید و دریافت که $D_f(z)$ به پارامتر c بستگی ندارد.

سطح سوم: توابع $\mathbb{Z}$ چندجمله‌ای

ایـــن مفهوم را می‌توان به توابع چند جمله‌ای از درجه بالاتر نیز ارتقا داد.

مثال۳:

برای

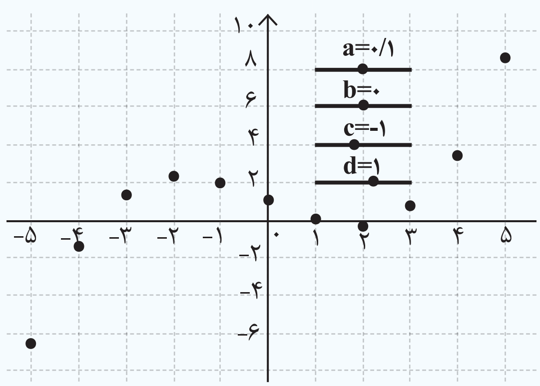
$f(z)=az^3+bz^2+cz+d$

داریم:

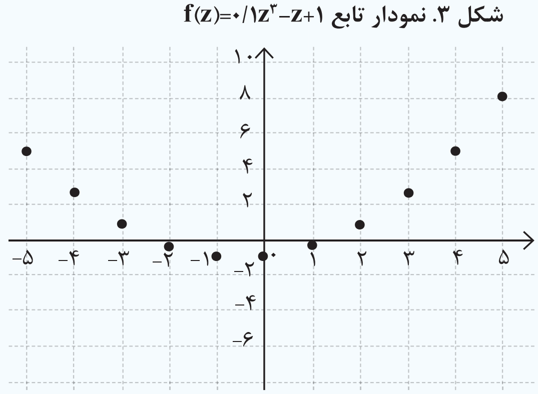
$D_f(z)=3az^2+(3a+2b)z+a+b+c.$

(D_f تابعـــی درجه دوم اســـت که بـــه پارامتر d بستگی ندارد.)

نگاهـــی بر تابع $f(z)=0/1z^3-z+1$ با تابع تفاضلی $D_f(z)=0/3z^2+0/3z-0/9$ و نمودارهای متوالی‌شـــان خواهیم داشت. (شکل‌های۳و۴)



شکل ۳. نمودار تابع $f(z)=0/1z^3-z+1$



شکل ۴.نمودار تابع تفاضلی $D_f(z)=0/3z^2+0/3z-0/9$

- به‌منظور توسعه مفهوم ریاضی آهنگ لحظه‌ای تغییر جدا از تجارب زندگی واقعی نیاز است تا تغییر مفهوم مشتق دستخوش تغییراتی شود زیرا دانش‌آموزان در به‌کارگیری دانش مربوط به حساب در شرایط واقعی دچار مشکل هستند

سطح چهارم: تابع‌نمایی

مثال ۴:

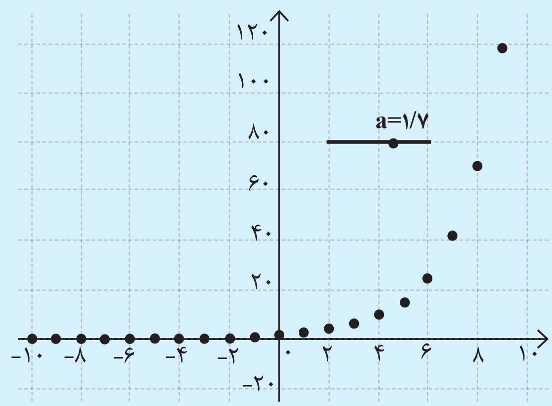
برای توابع نمایی

$E(z)=a^z$ و $(z\in \mathbb{Z}\ ,\ a\in R)$

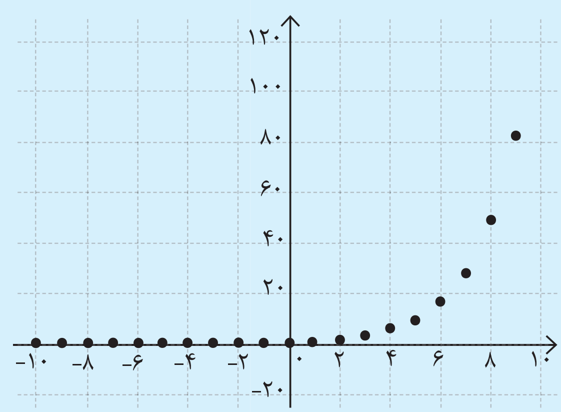
تابع تفاضل عبارت است از:

$D_E(z)=E(z+۱)-E(z)=a^{z+۱}-a^z=a^z(a-۱)$
$=E(z)(a-۱).$

برای دســـتیابی به $D_E(z)$ کافیســـت $E(z)$ را در عامل $(a-۱)$ ضرب کنیم. (شکل‌های ۵ و ۶)



شکل ۵. نمودار تابع‌نمایی



شکل ۶. نمودار تابع تفاضلیِ تابع‌نمایی

سطح پنجم: انتقال ایده از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

در این بخش دامنه‌هایی به‌صورت

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}_k=\{-\frac{۲}{k},-\frac{۱}{k},۰,\frac{۱}{k},\frac{۲}{k}\}$$

انتخاب می‌شوند که زیرمجموعه $[-۲,۲]$ هستند.

$$\mathbb{Z}=\{-\frac{۲}{۱۰},-\frac{۱}{۱۰},۰,\frac{۱}{۱۰},\frac{۲}{۱۰},...\}\quad (Z_{۱۰}=\frac{z}{۱۰}\ z\in \mathbb{Z}\}$$

$(z_{۱۰}\in \mathbb{Z}_{۱۰})$ و تابع f به‌صورت $f_{۱۰}:\mathbb{Z}_{۱۰}\to R$ تعریف می‌شود. برای رسیدن به آهنگ تغییر مقادیر متوالی، ایـــن بار فواصـــل را به‌جای ۱ واحـــد به $\frac{۱}{۱۰}$ محدود می‌کنیم و تابع کسر تفاضلی زیر به‌دست می‌آید:

$$D_f(z_{۱۰})=\frac{f(z_{۱۰}+\frac{۱}{۱۰})-f(z_{۱۰})}{\frac{۱}{۱۰}}\quad (z_{۱۰}\in \mathbb{Z}_{۱۰})\qquad (۳)$$

مثال ۵:

برای تابع $f(z_{۱۰})=۰/۱z_{۱۰}^۳-z_{۱۰}+۱$ داریم:

$$D_f(z_{۱۰})=\frac{f(z_{۱۰}+\frac{۱}{۱۰})-f(z_{۱۰})}{\frac{۱}{۱۰}}=۰/۳z_{۱۰}^۲+۰/۰۳z_{۱۰}-۰/۹۹۹$$

$$D_f(z_n)=\frac{f(z_n+\frac{۱}{n})-f(z_n)}{\frac{۱}{n}}\quad z_n\in \mathbb{Z}_n=\ -\frac{۲}{n}\ -\frac{۱}{n}\ \cdot\ \frac{۱}{n}\qquad (۴)$$

مثال ۶:

برای تابع درجه دوم $f(z)=az_n^۲+bz_n+c$ داریم

$$D_f(z_n)=۲az_n+b+\frac{a}{n}$$

و برای تابع $f(z_{۱۰})=۱/۱z_{۱۰}^۳-z_{۱۰}+۱$ می‌توان نوشت

$$D_f(z_n)=\frac{f(z_n+\frac{۱}{n})-f(z_n)}{\frac{۱}{n}}=۰/۳z_n^۲+\frac{۳}{۱۰n}z_n-۱+\frac{۱}{۱۰n^۲}$$

حال اگـــر $n\to+\infty$ داریـــم $D_f(z_n)=۰/۳z^۲-۱$ که همان مشتق تابع خواهد بود. این ایده برای تابع نمایی

$E(z_{۱۰})=a^{z_{۱۰}}$ (۵)

مشابه است و تابع کسر تفاضلی آن عبارت است از:

مطالعه (پینتو و تال، ۲۰۰۲) حاکی از این است که تصاویر دیداری، نقش مثبتی در تدریس و یادگیری آنالیز حقیقی دارند. همچنین ناوارو و کارراس (۲۰۰۶) نشان دادند که روش آموزش دیداری نه‌تنها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا تصویر مناسبی از مفهوم حد در ذهن خود بسازند، بلکه به آن‌ها کمک می‌کند به‌سمت فهم تعریف دشوار حد حرکت کنند

$$D_E(z_{10})=\frac{E(z_{10}+\frac{1}{10})-E(z_{10})}{\frac{1}{10}}=\frac{a^{z_{10}+\frac{1}{10}}-a^{z_{10}}}{\frac{1}{10}}=a^{z_{10}}\frac{a^{\frac{1}{10}}-1}{\frac{1}{10}} \quad (۶)$$

چنانچه $\frac{a^{\frac{1}{10}}-1}{\frac{1}{10}}=1$ یا a=۲/۵۹۳۷ فرض شود تابع $E(z_{10})$ با $D_E(z_{10})$ برابر خواهد بود. با در نظر گرفتن تابع نمایی

$$E(z_n)=a^{z_n} \quad (۷)$$

داریم

$$D_E(z_n)=\frac{E(z_n+\frac{1}{n})-E(z_n)}{\frac{1}{n}}=\frac{a^{z_n+\frac{1}{n}}-a^{z_n}}{\frac{1}{n}}=a^{z_n}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \quad (۸)$$

اما وقتی $n\to+\infty$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1$ و این به این معنی است که $D_E(z_n)$ همان مشتق تابع‌نمایی است.

در ادامه آهنگ لحظه‌ای تغییر برای $x_0\in D\subseteq R$ انجام می‌شود. دنباله کسر تفاضلی را برای تفاضل حقیقی مقدار تشکیل می‌دهیم.

$$D_n(x_0)=\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}} \quad (n\in N) \quad (۹)$$

مثال ۷:

برای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در نقطه $(x_0,f(x_0))$ داریم:

$$D_n(x_0)=\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{a(x_0+\frac{1}{n})^2+b(x_0+\frac{1}{n})+c-ax_0^2-bx_0-c}{\frac{1}{n}}$$

$$=2ax_0+b+\frac{a}{n}$$

بنابراین دنباله $D_n(x_0)$ با توجه به نمودار f دنباله شیب قاطع در یک نقطه تفسیر می‌شود.

اکنون در رویکرد گسسته به نقطه شروع مفهوم اولیه حد و مشتق می‌رسیم، با رویکرد گسسته به‌تدریج با بسط آن به اعداد حقیقی تابع مشتق و مشتق در یک نقطه به‌دست می‌آید.

نتیجه‌گیری

این مقاله ابتدا رویکرد گسسته برای درک مفهوم مشتق، بیان شده توسط ویگاند (۲۰۱۴) را معرفی می‌کند. کار کردن با دنباله گسسته و دنباله تفاضلی آن، می‌تواند ایده‌ای اساسی برای توسعه درک مفاهیم آهنگ تغییر و مشتق تابع باشد. روش ذکر شده، پیشنهادی برای تعمیم دنباله‌ها است زیرا از یک‌سو، به دنباله‌ها به‌عنوان اشیای خاص مستقل با ویژگی‌های جالب اشاره دارد (مانند دنباله‌های حسابی، هندسی یا نمایی) و از طرفی دیگر آن‌ها را وسیله‌ای برای فرآیندهای تقریب مفاهیم آهنگ تغییر می‌داند. رویکرد گسسته، ذهن را به‌صورت گام‌به‌گام به‌سوی درک بهتر آهنگ تغییر و آهنگ لحظه‌ای سوق می‌دهد، بدین‌صورت که با تفسیر مشتق تابع f در نقطه‌ای خاص از نمودار f، به‌عنوان دنبالهٔ شیب‌های قاطع توابع Z_n گسسته برای

محاســـبه آهنگ لحظه‌ای ارائه می‌شود. به‌کارگیری این روش تأثیر بســـزایی در درک مفهوم مشتق در مقایســـه با به‌کارگیـــری مفهوم حـــد دارد. در مرور مطالعاتـــی این رویکرد از نظـــر تجربی مورد ارزیابی قرار گرفته و پیشـــنهاد می‌شود که این رویکرد نوین در برنامه درســـی دانش‌آموزان به‌ویژه دانش‌آموزان رشته ریاضی گنجانده شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Churchman
2. Cetin
3. Roorda
4. Crouch
5. Haines
6. Lang
7. Weigand
8. Caballero
9. Henning
10. Hoffkamp
11. Hitt
12. Lara Chavez
13. Pinto
14. Navarro
15. Carreras
16. Alcock
17. Simpson
18. Fibonacci
19. NCTM

منابع

1. Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. Educational Studies in Mathematics, 58, 77– 100.

2. Cetin, N. (2009). The performance of undergraduate students in the limit concept. International journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 40(3), 323-330

3. Churchman, L. F. (1972). A comparative study of three different approaches to the limit concept. Dissertation. University of Georgia.

4. crouch, R. & Haines, C. (2004). Mathematical modeling: transitions between the real world and the mathematical mode. International Journal of Education in Mathematics, science and Technology, 35(2), 199-211.

5. Henning, A., & Hoffkamp, A. (2013). Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. Proceedings of CERME 8. Antalya, Turkey.

6. Hitt, F., & Lara-Chavez, H. (1999). Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of view: That of the teacher and that of the student. In L. Bills (Ed.), Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics, 19, 49–54.

7. Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9(3), 205–227.

8. Lang, S. (1964/1973). A first course in calculus. Dordrecht: springer.

9. Mrtinovic, D., & Karadag, Z. (2012). Dynamic and interactive mathematics learning environments: The case of teaching the limit concept. Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 31(1), 41–48.

10. NCTM. (1989). Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

11. Navarro, M., & Carreras, P. (2006). Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework. Research in Collegiate Mathematics Education, VI, 61–98.

12. Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. For the Learning of Mathematics, 22, 2–10.

13. Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. Educational Studies in Mathematics, 69(3), 217–233.

14. Roorda, G. , Vos, P. & Goedhort, M. (2007). The concept of the derivative in modelling and applications. In Chr. Haines et al. (Eds), Mathematical modeling (ICTMA12): Education, engineering and economics Proceedings of the 12th international conference on the teaching of mathematical modelling and applications. London, UK, July 10-14, 2005 Chi Chester Horwood.

15. Weigand, H-G. (2004). Sequences – basic elements for discrete mathematics. ZDM-Zentralblatt for Didactic der mathematic, 36(3) 91-97.

16. Weigand, H-G. (2014) A discrete approach to the concept of derivative .ZDM Mathematics Education.